اندازه بـزرگترين مجموعه هاي بحرانـي درمربعهاي لاتين

On the largest size of the critical sets in latin squares

سيد عبادالله محموديان

دانشگاه صنعتي شريف

Richard Bean

University of Queensland & IPM

سخنراني در دانشگاه زنجان 15/2/1381

طرح كلي سخنراني

- تعريف مربع لاتين و مفاهيم مورد نياز ديگر
- مسأله مجموعه هاي بحراني
- كرانهاي پايين و بالا: scs(n)، lcs(n)
- مروري بر نتايج مختلف
- يك كران پايين براي lcs(n) (با حامد حاتمي)
- يك كران بالا براي lcs(n) (با ريچارد بين)

تعریف مربعهای لاتین (Latin Squares):

یک آرایه $n \times n$ از اعداد ۱ تا n که در هیچ سطر یا ستون آن تکرار نداریم.

مثال: یک مربع لاتین 4×4

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

- برای هر n اقلاً یك مربع لاتین $n \times n$ موجود است.
- از زمان اویلر (1782) به بعد مطالعات زیادي شده است.
- كاربرد در زمینه هاي مختلف:

  - كدهاي مخابراتي
  - رمزنگاري
  - طرحهاي آزمايشي آماري
  - كشاورزي

يك مسأُله جالب: مجموعه هاي بحراني

تعريف مربع لاتين جزئي (Partial Latin Square):

يك آرايه $n \times n$ از اعداد 1 تا n كه:

- لزوماً همه سلولها پر نيستند.
- در هر سطر و در هر ستون هر عنصر حداكثر يك بار ظاهر مي شود (تكرار نداريم)!

مثال.

1	2		
2			
			3

تعريف مجموعه هاي بحراني (در مربعهاي لاتين) . Critical Sets

يك مربع لاتين جزئي كه به طور منحصر به فرد به يك مربع لاتين گسترش يابد و هيچ زيرمربع جزئی از آن دارای این خاصيت نباشد.

مثال:

1	2	3?	4?
2	3?	4?	1?
3?	4?	1?	2?
4?	1?	2?	3

يك مجموعه بحراني

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	2	2	3

مسأله.

- اندازه کوچکترین و بزرگترین مجموعهٔ بحرانی:

$scs(n)$ و $lcs(n)$؟

- مهمترین حدس درباره $scs(n)$:

$$scs(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

- جایزه ۱۰۰۰۰۰ تومان !

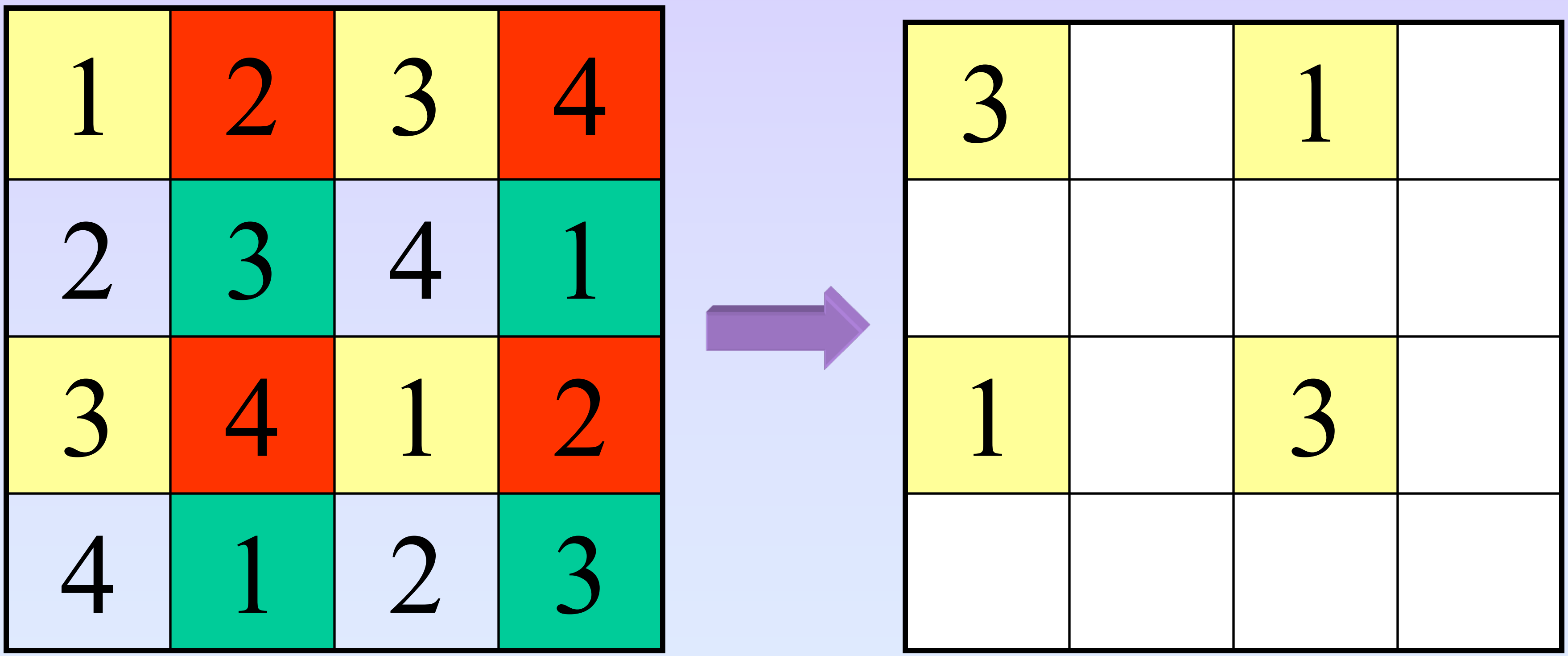
- برای $n \leq ۷$ درستی در آن تایید شده است.

در مربعهاي لاتين چرخشي كه n زوج است.

اندازه كوچكترين مجموعه بحراني $= \left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor$

زيرا:

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3


1 2 3 4
2 3 4 1
3 4 1 2
4 1 2 3
3 1
1 3

Latin Interchange

1	2	3	
2	3	4	
	4	1	
4	1		

2	3	1	
4	2	3	
	1	4	
1	4		

- بحث ما براي lcs(n) است.
- حدس نلدر Nelder (1977)

$$lcs\,(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- Curran و Van Rees (1978) نشان دادند:

$$lcs\,(4) \geq 7.$$

- و حدس فوق را رد کردند

مسأله باز: پيدا کردن lcs(n)؟

- با دکتر Richard Bean، ثابت کرده ایم که

$$lcs(n) \leq n^2 - 3n + 3.$$

- ایشان توضیح خواهند داد.

- با آقاي حامد حاتمي ثابت کرده ایم براي هر n:

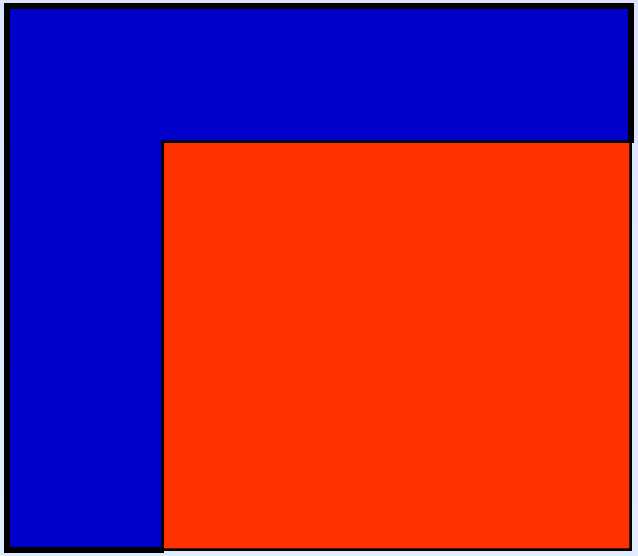
$$lcs(n) \geq n^2\left(1 - \frac{2+\ln 2}{\ln n}\right) + n\left[1 + \frac{\ln(8\pi)}{\ln n}\right] - \frac{\ln 2}{\ln n}.$$

$$lcs(n) \geq n^2\left(1-\frac{2+\ln 2}{\ln n}\right)+n\left[1+\frac{\ln(8\pi)}{\ln n}\right]-\frac{\ln 2}{\ln n}.$$

خلاصه اثبات. از حدس (اثبات شده) واندر واردن براي تعداد مربعهاي لاتين $n \times n$ داريم:

$$L(n) \geq \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}}.$$

اگر همه درايه ها باشند به جز يك سطر يا يك ستون منحصر به فرد تكميل مي شود. پس براي هر مربع لاتين يك مجموعه بحراني وجود دارد كه مثلاٌ با سطر اول و ستون اول اشتراكي ندارد.



- تعداد شكلهاي مختلف حداكثر مساوي:

$$۲(n-۱)^{۲}$$

- تعداد انتخاب درايه هاي مختلف در يك شكل به خصوص حداكثر مساوي:

$$n^{lcs(n)}$$

- پس تعداد مجموعه هاي بحراني حداكثر مساوي:

$$۲^{(n-۱)^۲} n^{lcs(n)}$$

- پس داريم :

$$\frac{(n!)^{۲n}}{n^{n^۲}} \le L(n) \le ۲^{n^۲-۲n+۱} n^{lcs(n)}.$$

- و از فرمول استرلينگ

$$n! \ge \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

پس:

$$\frac{(2\pi)^n n^{2n^2+n}}{e^{2n^2} n^{n^2}} \le 2^{n^2-2n+1} n^{lcs(n)}.$$

و یا:

$$n\ln(2\pi)+(n^2+n)\ln n-2n^2-(n^2-2n+1)\ln 2$$
$$\le lcs(n)\ln n.$$

كه نامساوي صورت قضيه است.